Estimation de la distance d'un astéroïde par la méthode de la parallaxe

Florian Signoret, GAPRA

http://www.astrosignoret.fr

28/09/2016

Introduction

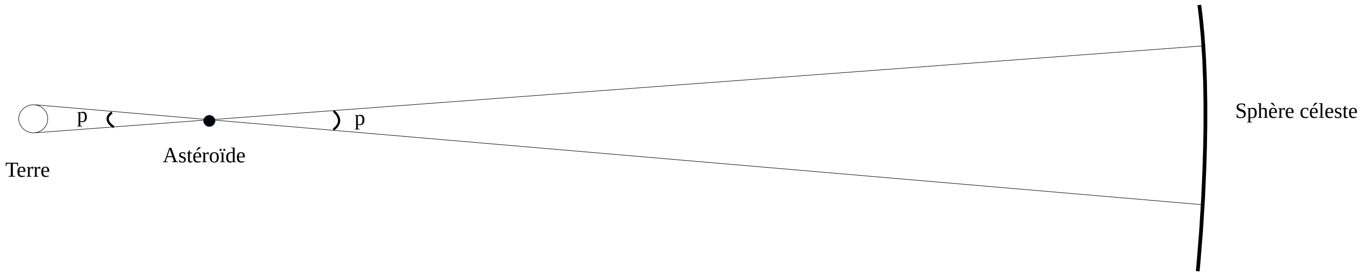
La méthode consiste à observer un astéroïde au même moment à partir de deux observatoires A et B très éloignés.

Le calcul se fait en trois étapes :

1. L'estimation de la parallaxe à partir des images obtenues.
2. Le calcul de la base de l'observation.
3. La détermination de la distance de l'astéroïde à partir des résultats précédents.

Partie 1 : Calcul de la parallaxe

1.1 Introduction



La distance entre la Terre et l'astéroïde est négligeable par rapport à celle des étoiles.

La parallaxe p peut donc être approximée à l'angle apparent entre les deux positions de l'astéroïde sur la sphère céleste : celle vue par l'observatoire A et celle vue par l'observatoire B.

1.2 Astrométrie

Tout d'abord, il est nécessaire de mesurer la position de l'astéroïde sur chacune des images. Certains logiciels permettent cette opération, en comparant la position relative du centroïde de l'astéroïde par rapport aux étoiles voisines. En effet, les coordonnées de ces dernières sont données par les catalogues.

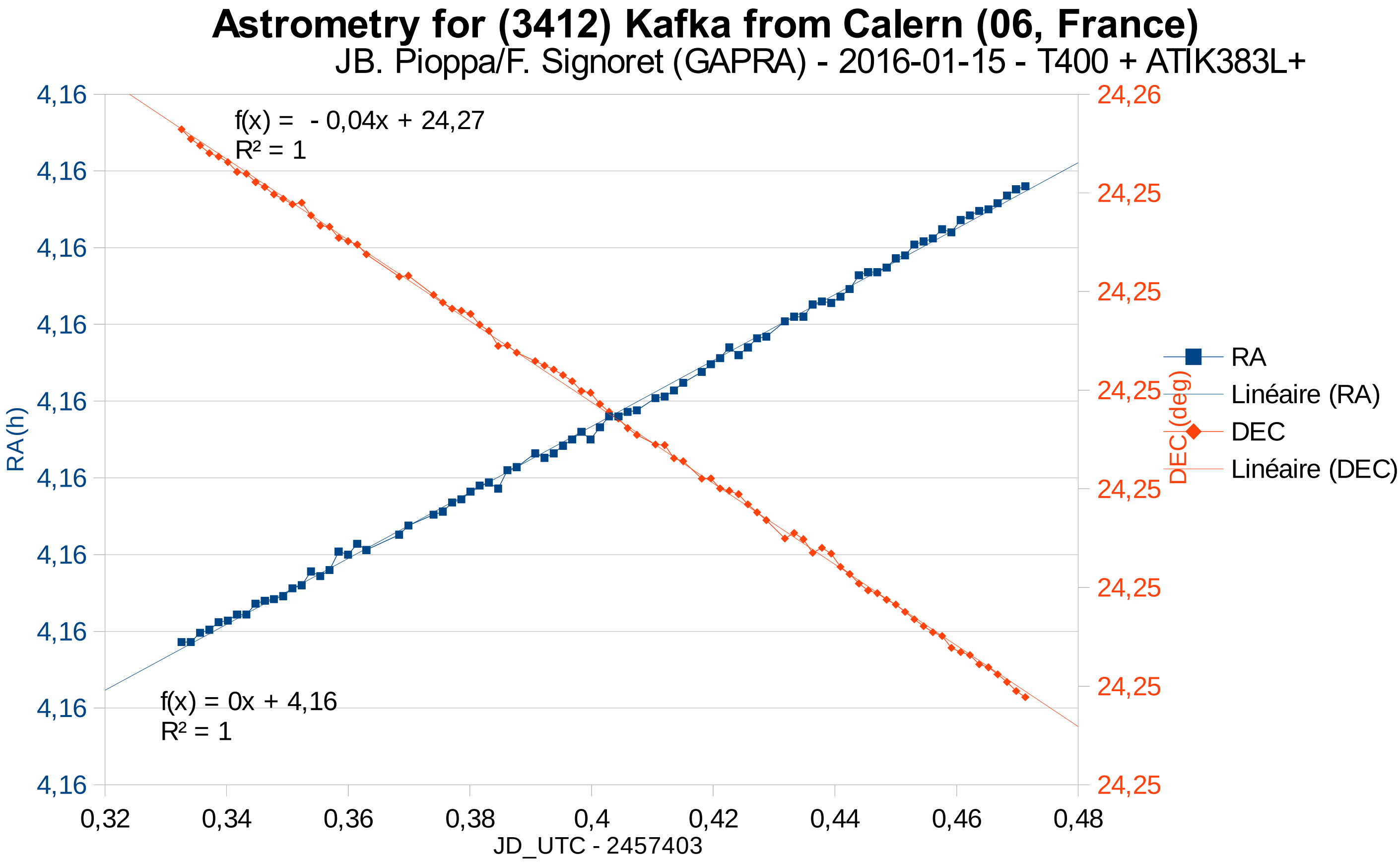
Il est important d'utiliser le même logiciel et la même procédure pour réaliser cette opération sur l'ensemble des images des deux observatoires (il est en effet nécessaire que les même algorithmes et mêmes catalogues soient utilisés).

On obtient, pour chaque observatoire, une série datée de coordonnées célestes (ascension droite + déclinaison).

1.3 Mesure des positions à une date donnée

Pour apporter plus de précision, on ne va pas réaliser la mesure sur une seule pose, mais sur l'ensemble des poses, sur lesquelles on appliquera une régression linéaire (voir figure suivante).

On choisit alors une date arbitraire t, et on obtient, avec l'équation de droite précédente, une ascension droite et une déclinaison, notées RA_1 et DEC_1. On effectue la même chose pour l'autre observatoire : on trouve RA_2 et DEC_2, légèrement différents.



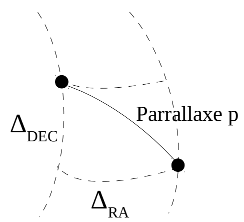
1.4 Calcul de la parallaxe

Tout d'abord, il faut calculer la différence de position et l'exprimer en arc-secondes. La déclinaison étant exprimée en degrés, il suffit de multiplier la différence par 60² pour la convertir en arc-secondes :

$$\Delta_{DEC} = |DEC_1 - DEC_2| . 60^2$$

Pour l'ascension droite, une valeur donnée représente un angle maximal au niveau de l'équateur céleste, et un angle minimal au pôle Nord céleste. La conversion en arc-seconde dépend ainsi de la déclinaison :

$$\Delta_{RA} = |RA_1 - RA_2| . \cos(DEC_1) . 60^2$$



En appliquant le théorème de Pythagore étendu au triangle sphérique rectangle :

$$p = \arccos(\cos(\Delta_{RA}) . \cos(\Delta_{DEC}))$$

1.5 Calcul des incertitudes

Notons I_x l'incertitude sur la grandeur x. L'incertitude d'une différence est la somme des incertitudes :

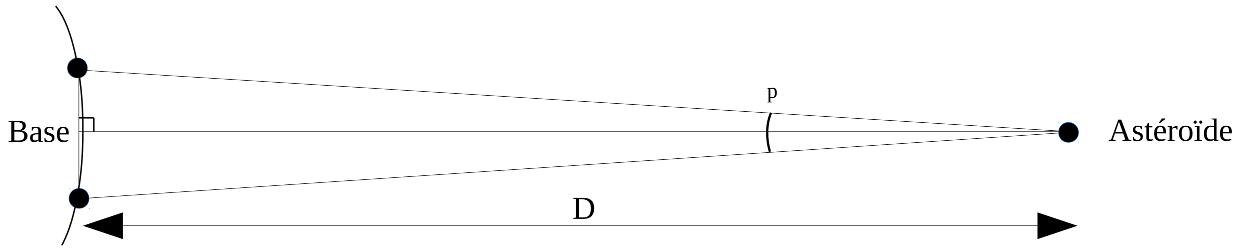
$$I_{\Delta_{RA}} = I_{RA_1} + I_{RA_2} \qquad I_{\Delta_{DEC}} = I_{DEC_1} + I_{DEC_2}$$

Pour l'incertitude sur p, il faut effectuer un calcul de dérivées partielles :

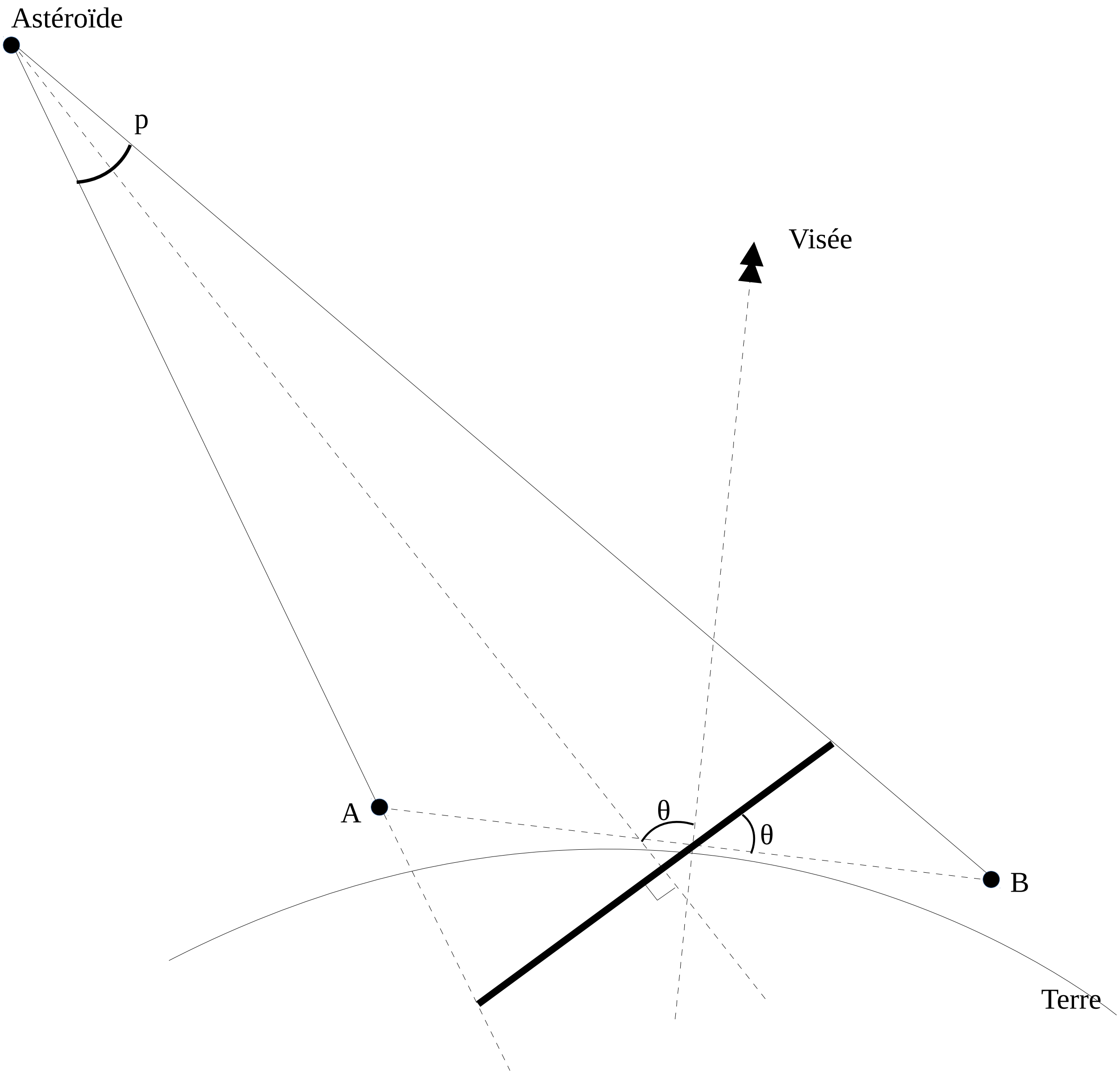
$$I_p = \frac{\Delta_{RA} \, . \, I_{\Delta_{RA}} + \Delta_{DEC} \, . \, I_{\Delta_{DEC}}}{p}$$

Partie 2 : Calcul de la base d'observation

2.1 Introduction



La longueur de la *Base* va permettre de calculer *D*. Mais il ne s'agit pas exactement de la distance *AB* (séparant les deux observatoires). En effet, *(AB)* n'est pas forcément perpendiculaire à la direction de l'astéroïde. Il va falloir calculer l'inclinaison *θ*, en prenant en compte : la forme elliptique de la Terre, l'altitude des observatoires, leurs coordonnées géographiques et la position de l'astéroïde au moment de l'observation.

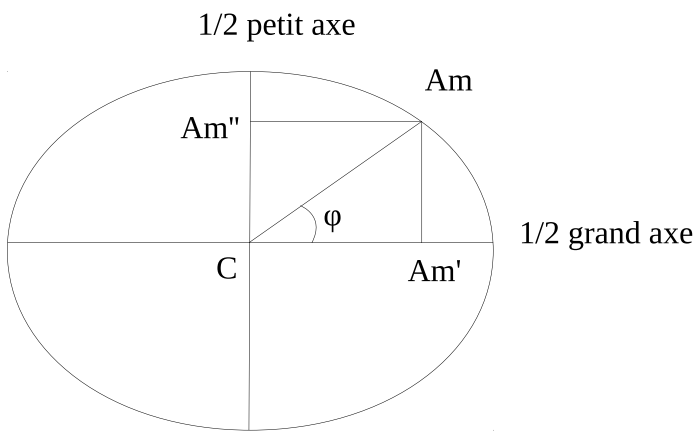


2.2 Conventions de nommage et calcul de diverses distances

Dans la suite des calculs, nous nommerons les points et longueurs de la manière suivante :

A	Lieu de l'observatoire *A*.
B	Lieu de l'observatoire *B*.
C	Centre de la Terre.
Am et *Bm*	Lieux situés à la verticale de *A* (et *B*), au niveau de la mer.
A', *B'*, *Am'*, *Bm'*	Projections de *A*, *B*, *Am*, *Bm* sur le plan équatorial.
Am'', *Bm''*	Projections de *Am*, *Bm* sur l'axe de rotation de la Terre.
φ, *λ*, *h*	Latitude (en degrés), longitude (en degrés) et altitude (en km) de *A*.
φ', *λ'*, *h'*	Latitude (en degrés), longitude (en degrés) et altitude (en km) de *B*.
a, *b*	Demi-grand-axe et demi-petit-axe de la Terre, constantes.

Calcul des différentes distances à partir du centre de la Terre :



$$CAm' = a.\cos(\varphi)$$

$$CAm'' = b.\sin(\varphi)$$

En appliquant le théorème de Pythagore :

$$CAm = \sqrt{(CAm')^2 + (CAm'')^2}$$

Pour déduire *CA*, il suffit d'ajouter l'altitude :

$$CA = CAm + h$$

A' étant la projection de *A* sur le plan équatorial, on a :

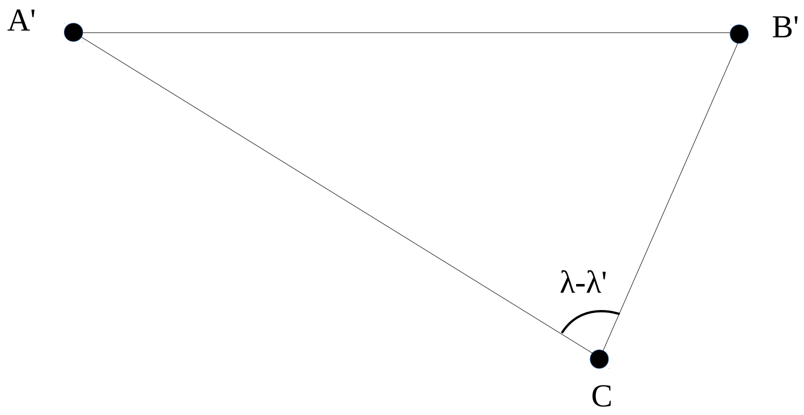
$$CA' = CA.\cos(\varphi)$$

On peut déterminer, de la même manière, les longueurs *CBm'*, *CBm''*, *CBm*, *CB* et *CB'*.

2.3 Calcul des coordonnées équatoriales de la direction de *(AB)*

2.3.1 Calcul de *A'B'*

En se plaçant dans le plan équatorial :

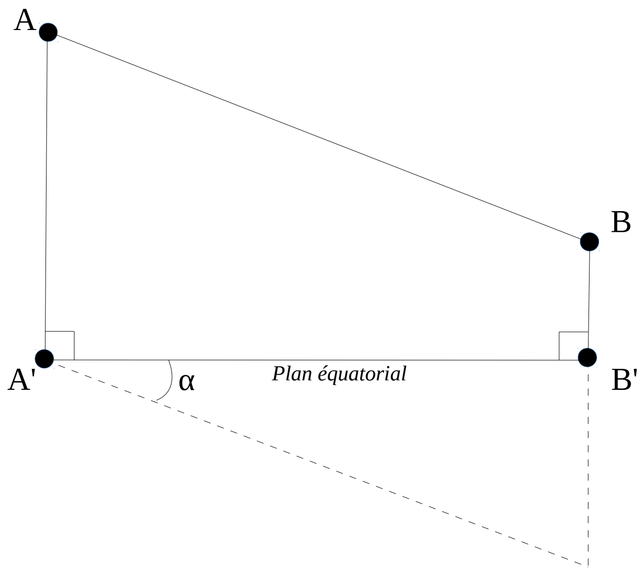


En utilisant la loi des cosinus, on obtient :

$$A'B'=\sqrt{CA'^2+CB'^2-2CA'.CB'.\cos(\lambda-\lambda')}$$

2.3.2 Calcul de la composante en latitude *α*

En se plaçant dans le plan auquel appartiennent les points *A*, *A'*, *B* et *B'* :



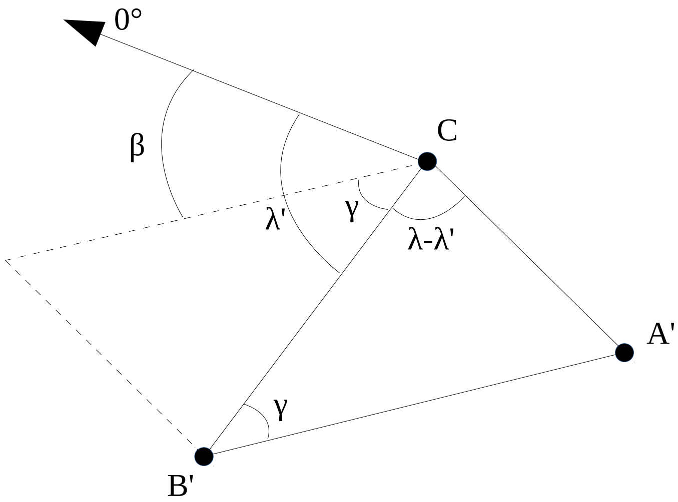
On en déduit :

$$\alpha=\arctan\left(\frac{AA'-BB'}{A'B'}\right)=\arctan\left(\frac{CA.\sin(\varphi)-CB.\sin(\varphi')}{A'B'}\right)$$

Attention au signe : *α est* positif si *AA'* > *BB'*, négatif sinon.

2.3.3 Calcul de la composante en longitude β

On se place à nouveau dans le plan équatorial :



Dans le triangle *CA'B'*, la loi des sinus permet de déterminer l'angle γ, puis l'angle β:

$$\frac{A'B'}{\sin(\lambda-\lambda')}=\frac{CA'}{\sin(\gamma)}$$

$$\gamma=\arcsin\left(\frac{CA'.\sin(\lambda-\lambda')}{A'B'}\right)$$

$$\beta=\lambda'-\gamma$$

2.4 Calcul de l'inclinaison

Il s'agit de trouver l'angle formé entre la direction de l'astéroïde et la direction de (AB) dont les coordonnées viennent d'être calculées.

2.4.1 Conversion de l'ascension droite RA' de l'astéroïde en équivalent longitude

Soit *JD* le Jour Julien de l'observation, à 0h TU. Soit t l'heure d'observation (en heures TU).

On calcule :

$$T=\frac{JD-2\,415\,020}{36\,525}$$

$$T_1=0{,}276919398+100{,}0021359.T+0{,}000001075.T^2$$

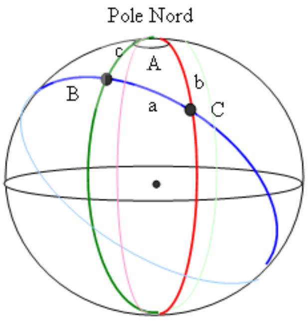
$$T_2=(T_1-floor(T_1))\times 24$$

$$T_3=(T_2+1{,}002738.t)\,modulo\,24$$

$$RA'=\frac{360}{24}.(RA-T_3)$$

Attention : utiliser l'ascension droite de la date (précession des équinoxe comprise, et non J2000).

2.4.2 Calcul de l'inclinaison θ



Source : http://www.astro-carl.com

Une des formules de trigonométrie sphérique du groupe de Gauss donne :

$$\cos(a)=\cos(b)\cos(c)+\sin(b)\sin(c)\cos(A)$$

En appliquant cette formule à la direction de l'astéroïde et la direction de (AB) à 90° près :

$$\theta=90-\arccos(\cos(90-DEC)\cos(90-\alpha)+\sin(90-DEC)\sin(90-\alpha)\cos(RA'-\beta))$$

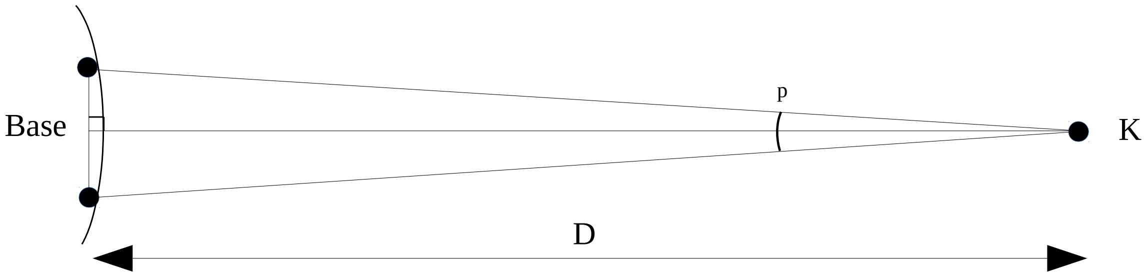
Attention : utiliser la déclinaison de la date (précession des équinoxe comprise, et non J2000).

2.5 Calcul de la base d'observation

Comme p est très petit, la base d'observation peut être considérée comme la projection orthogonale de *[AB]* :

$$Base=AB.\cos(\theta)$$

Partie 3 : Distance de l'astéroïde



$$\tan\left(\frac{p}{2}\right)=\frac{Base}{2}\times\left(\frac{1}{D}\right)$$

D'où :

$$D=\frac{Base}{2.\tan\left(\frac{p}{2}\right)}\simeq\frac{Base}{p'}$$ avec p' valeur de p en radians.

1 radian équivaut à 206 265 secondes d'arc, donc :

$$D\simeq 206265.\frac{Base}{p}$$ avec *D* et *Base* et km, *p* en secondes d'arc.

$$I_D=D.\left(\frac{I_{Base}}{Base}+\frac{Ip}{p}\right)$$